Beitrag zum Erneuerungsproblem

Inaugural-Dissertation
der philosophischen Fakultät II der Universität Bern
zur Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

HANS LIECHTI

von Signau

BERN
Gedruckt bei Stämpfli & Cie.
1942

Beitrag zum Erneuerungsproblem

Inaugural-Dissertation

der philosophischen Fakultät II der Universität Bern
zur Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

HANS LIECHTI

von Signau

BERN

Gedruckt bei Stämpfli & Cie.

1942

Von der philosophischen Fakultät II auf Antrag der Herren Professoren Dr. A. Alder und Dr. H. Hadwiger angenommen.

Bern, den 4. Dezember 1941.

Der Dekan: Prof. *W. Schopfer.*

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Meinen verehrten Lehrern, den Herren Professoren Dr. A. Alder, Dr. A. Amonn, Dr. W. Friedli †, Dr. H. Hadwiger und Dr. W. Scherrer möchte ich an dieser Stelle für ihren vorzüglichen Unterricht und das mir bewiesene Wohlwollen meinen besten Dank aussprechen.

Die vorliegende Arbeit «Beitrag zum Erneuerungsproblem» ist auf Anregung meines verehrten Lehrers, des Herrn Prof. Dr. H. Hadwiger, entstanden und unter der umsichtigen Führung der Herren Professoren Dr. A. Alder und Dr. H. Hadwiger ausgearbeitet worden. Ihnen gebührt ganz besonderer Dank.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

§ 1. Ausscheidefunktion und Erneuerungsfunktion 7

§ 2. Formale Darstellung der Lösung mit Hilfe der Laplace-Transformation 10

§ 3. Koppelungsgleichung 12

§ 4. Lösung der Erneuerungsgleichung für eine spezielle Klasse von Ausscheidefunktionen 13

§ 5. Ermittlung der Erneuerungsfunktion durch die symbolische Auflösungsformel 16

§ 6. Anwendung für eine Personengesamtheit, deren Absterbeordnung der schweizerischen Volkssterbetafel S. M. 1929/32 folgt 18

Literaturnachweis 23

Lebenslauf 24

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547623_0037

Beitrag zum Erneuerungsproblem.

§ 1.

Ausscheidefunktion und Erneuerungsfunktion.

Wir betrachten eine *Personengesamtheit*, der gleichaltrige Personen neu angeschlossen werden. Die neu angegliederten Personen sind nun irgendeiner Ursache zufolge dem zufallsartigen Ausscheiden aus der Gesamtheit unterworfen.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ausscheiden einer der Gesamtheit neu angegliederten Person nach einer zwischen x und $x + dx$ gelegenen Zeit sei

$$\Phi(x)\, dx.$$

$\Phi(x)$ ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte und heisst *Ausscheidefunktion*.

Zur mathematischen Präzisierung und mit Rücksicht auf die Bedeutung von $\Phi(x)$ als Wahrscheinlichkeitsdichte formulieren wir für $\Phi(x)$ folgende *Voraussetzungen:*

(A)

$$a.\quad \Phi(x) \geqq 0$$

$$b.\quad \Phi(x) \text{ stetig für } x > 0$$

$$c.\quad \int_0^\infty \Phi(x)\, dx = 1$$

$$d.\quad \lim_{x \to \infty} \Phi(x) = 0.$$

Bedeutet $p(t)$ die *Verweilswahrscheinlichkeit* einer Person (Wahrscheinlichkeit, der Gesamtheit mindestens t Zeiteinheiten anzugehören), so kann diese Wahrscheinlichkeit durch die Ausscheidefunktion dargestellt werden.

Es ist

(1)
$$p(t) = 1 - \int_0^t \Phi(x)\, dx.$$

Wir beziehen nun die Vorgänge in der Gesamtheit auf eine feste Zeitachse $t \geqq 0$. Es sei $\varphi(t)\,dt$ die Zahl der im Zeitintervall t bis $t + dt$ neu eintretenden Personen. Die Eintrittsdichte $\varphi(t)$ heisst dann *Erneuerungsfunktion*. Das *allgemeine Erneuerungsproblem* besteht in der Klärung der funktionalen Beziehungen, die bei fest vorgegebener Ausscheidefunktion zwischen der Erneuerungsfunktion und dem Bestand der Gesamtheit bestehen. Eine spezielle Fragestellung ist in der historischen Entwicklung des allgemeinen Problems besonders stark in den Vordergrund getreten: Wie muss $\varphi(t)$ gewählt werden, so dass der Bestand der Gesamtheit konstant ausfällt? Das ist das *spezielle Erneuerungsproblem*, das den folgenden Untersuchungen zugrunde gelegt ist.

Diese so definierte *Erneuerungsfunktion* $\varphi(x)$ ergibt sich bekanntlich als Lösung der Volterraschen Integralgleichung erster Art (vgl. *Ch. Moser* [1]) *)

$$1 = p(t) + \int_0^t p(t-x)\,\varphi(x)\,dx. \tag{2}$$

Durch einmaliges formales Differenzieren der Integralgleichung (2) nach t und unter Berücksichtigung der aus (1) hervorgehenden Relation

$$p'(t) = -\Phi(t),$$

erhalten wir die äquivalente Volterrasche Integralgleichung zweiter Art

$$\varphi(t) = \Phi(t) + \int_0^t \Phi(t-x)\,\varphi(x)\,dx, \tag{3}$$

in welche die Ausscheidefunktion eingeht.

Ist $\Phi(t)$ in $t = 0$ von rechts stetig, so gilt nach Voraussetzung (Ab) und (Ad) in $0 \leqq t < \infty$

$$\Phi(t) \leqq M. \tag{4}$$

Wie die allgemeine Theorie der Volterraschen Integralgleichungen lehrt, besitzt die Integralgleichung (3) im Hinblick auf die hier geltenden Verhältnisse eine eindeutig bestimmte und überall stetige Lösung $\varphi(t)$. (Vgl. *E. Goursat* [2], S. 336.)

*) Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf den Literaturnachweis.

In der versicherungswissenschaftlichen Literatur wurde diese spezielle Integralgleichung mehrfach behandelt. Wir wollen die bereits erzielten Ergebnisse kurz betrachten. Soll bei kontinuierlicher Betrachtungsweise das Absterben einer Personengesamtheit möglichst weitgehend erfasst werden, so wird gewöhnlich von $p(t)$ verlangt:

(B) *$p(t)$ ist eine stetige, monoton nicht steigende Funktion mit* $p(0) = 1$ *und* $\lim_{t \to \infty} p(t) = 0$.

Für die durch (1) gegebene Funktion $p(t)$ sind die in (B) formulierten Voraussetzungen jedenfalls erfüllt. Die Voraussetzungen (A) sind stärker als (B). Ziel sämtlicher Autoren war, über $\varphi(t)$ in der Integralgleichung (2) möglichst allgemeine Aussagen zu machen, insbesondere das asymptotische Verhalten für $t \to \infty$ festzustellen. Es seien an dieser Stelle die Arbeiten von *L. Herbelot* [3] und *E. Zwinggi* [4] erwähnt, in welchen die Ansicht vertreten war, $\varphi(t)$ strebe mit wachsendem t in Form einer gedämpften Schwingung einem Grenzwert zu. So hat z. B. *H. Schulthess* [5] für das *Gesetz von Achard* die Erneuerungsfunktion bestimmt. Es treten trigonometrische Funktionen auf und der Wellencharakter der Erneuerungsfunktion tritt deutlich zutage.

Nun hat aber *H. Hadwiger* an zwei Beispielen gezeigt, dass die Erneuerungsfunktion sich nicht wellenförmig einem asymptotischen Grenzwert nähern muss, da beim ersten Beispiel [6] $\varphi(t)$ monoton verläuft, also der Grenzwert nur von einer Seite approximiert wird, während beim zweiten Beispiel [7] $\varphi(t)$ nicht einmal beschränkt ist und überhaupt kein Grenzwert existiert.

Für diese beiden Beispiele verwendete *Hadwiger* Verweilswahrscheinlichkeiten, die für jedes endliche t noch positive Werte annehmen. Die theoretisch möglichen Alter einer Person sind unbeschränkt. In der Praxis pflegt man häufig Verweilswahrscheinlichkeiten zu verwenden, die von einem gewissen endlichen Wert ω an identisch verschwinden (Gesetz von Achard bei *Schulthess*).

Diese Unterscheidung zwischen der Problemstellung im Falle des unendlichen von der im Falle des endlichen Höchstalters stellt sich nach den Untersuchungen von *H. Richter* [8] als sehr wesentlich heraus. Es zeigt sich. dass die in (B) über $p(t)$ gemachten Voraussetzungen nicht ausreichen, die oszillierende oder auch nur die schlechthin stattfindende Konvergenz der Funktion $\varphi(t)$ gegen einen Grenzwert zu garantieren.

Dies wurde im zweiten Beispiel von *Hadwiger* im Falle des unendlichen Höchstalters gezeigt; *Richter* will es in einer weitern Untersuchung anhand eines Gegenbeispieles im Falle des endlichen Höchstalters zeigen.

Dem gegenüber beweist *Richter* für endliches Höchstalter, dass die Funktion $q(t)$ sich stets oszillierend einem Grenzwert nähert, sobald $p(t)$ als stückweise differenzierbar, mit stückweise stetiger Ableitung vorausgesetzt wird. *Richter* [9] zeigt auch, dass $\lim_{t \to \infty} p'(t) = 0$ sein muss, damit die Erneuerungsfunktion beschränkt und konvergent ist. Diese von *Richter* gewählten Voraussetzungen sind jedenfalls durch die Voraussetzungen (A) gewährleistet. Der Konvergenzsatz für die Erneuerungsfunktion gilt somit bei Beschränkung auf endliche Höchstalter unter den Voraussetzungen (A), nicht aber unter den schwächeren (B). Immerhin ist für eine sehr umfassende Klasse von Funktionen $p(t)$ das asymptotische Verhalten der Erneuerungsfunktion $\varphi(t)$ sichergestellt.

§ 2.

Formale Darstellung der Lösung mit Hilfe der Laplace-Transformation.

Die Herleitung der Darstellungsformel für die Lösung der Integralgleichung (3) ist eine Anwendung der Theorie der Laplace-Transformation.

Auf Grund der bekannten Eigenschaften der Funktionen $\Phi(t)$ und $\varphi(t)$ ergibt sich die *absolute Konvergenz* der Laplace-Integrale

$$L[\Phi, z] = \int_0^\infty e^{-zt}\, \Phi(t)\, dt, \tag{5}$$

$$L[\varphi, z] = \int_0^\infty e^{-zt}\, \varphi(t)\, dt$$

in einer Halbebene $R[z] \geqq \alpha > 0$.

Mit Verwendung der in der Theorie der Laplace-Transformation gebräuchlichen Faltungssymbolik schreibt man die Integralgleichung (3) in der folgenden Form:

$$\varphi(t) = \Phi(t) + \Phi(t) * \varphi(t). \tag{6}$$

Werden die beiden Seiten der Relation (6) der Laplace-Transformation unterworfen, so ergibt sich nach dem *Faltungssatz (G. Doetsch* [10], S. 161)

$$L[\varphi, z] = L[\Phi, z] + L[\Phi, z] \cdot L[\varphi, z]. \tag{7}$$

Die durch die Integralbildung in Gleichung (3) bzw. (6) dargestellte transzendente Beziehung zwischen den Funktionen Φ und φ wurde durch die durch die Laplace-Transformation bewerkstelligte Funktionenabbildung in eine algebraische, sogar lineare Relation zwischen den Laplace-Transformierten $L[\Phi]$ und $L[\varphi]$ umgewandelt.

Die Auflösung nach $L[\varphi, z]$ ergibt

$$L[\varphi, z] = \frac{L[\Phi, z]}{1 - L[\Phi, z]}, \tag{8}$$

oder für die Erneuerungsfunktion $\varphi(t)$ die *symbolische Auflösungsformel:*

$$\varphi(t) = L^{-1}\left\{\frac{L[\Phi, z]}{1 - L[\Phi, z]}\right\}. \tag{9}$$

Hier bedeutet L^{-1} die Inverse der Laplace-Transformation L. (Vgl. *V. A. Kostitzin* [11], S. 5, *H. Hadwiger* [6].)

Da in $R[z] \geqq \alpha > 0$ wegen Voraussetzung (Ac)

$$|L[\Phi, z]| < 1$$

ausfällt, kann der in der Auflösungsformel (9) enthaltene Bruch

$$\frac{L[\Phi, z]}{1 - L[\Phi, z]}$$

in die Reihe

$$L[\Phi, z] + L[\Phi, z]^2 + L[\Phi, z]^3 + \ldots$$

entwickelt werden. Mit Rücksicht auf den *Faltungssatz* kann geschrieben werden

$$L[\Phi] + L[\Phi * \Phi] + L[\Phi * \Phi * \Phi] + \ldots.$$

Vertauschen wir Laplace-Integration und Summation (wegen der Zulässigkeit vgl. einen Hilfssatz von *T. J. I'A. Bromwich* [12]), so resultiert

$$L\{\Phi + \Phi * \Phi + \Phi * \Phi * \Phi + \ldots\};$$

und wegen der Stetigkeit von $\varphi(t)$ und $\Phi(t)$ und derjenigen der Faltungspotenzen von $\Phi(t)$ (vgl. *G. Doetsch* [10], S. 34, Abs. 2) ergibt sich aus (9) auf diese Weise

$$(10) \qquad \varphi(t) = \Phi(t) + \Phi(t) * \Phi(t) + \Phi(t) * \Phi(t) * \Phi(t) + \ldots.$$

Diese Entwicklung der Lösung ist die mit Verwendung der Faltungssymbolik geschriebene, in der Theorie der Integralgleichungen wohlbekannte *Neumannsche Reihe*. Sie konvergiert in jedem endlichen Intervall gleichmässig. (Vgl. *G. Hamel* [13], S. 32, *G. Doetsch* [10], S. 284.)

§ 3.

Koppelungsgleichung.

Man betrachte zwei Personengesamtheiten G_1 und G_2, mit den zugehörigen Ausscheidefunktionen

$$\Phi_1(x) \text{ und } \Phi_2(x).$$

Die beiden Gesamtheiten seien so miteinander *gekoppelt*, dass die aus der Gesamtheit G_1 ausscheidenden Personen genau diejenigen sind, die der Gesamtheit G_2 neu beitreten. Die sowohl in G_1 als auch in G_2 enthaltenen Personen bilden nun eine neue Gesamtheit G_3, mit der zugehörigen Ausscheidefunktion $\Phi_3(x)$.

Symbolisch kann die *Koppelung* von G_1 und G_2 geschrieben werden,

$$G_3 = G_1 \times G_2.$$

Die zu G_3 gehörende Ausscheidefunktion $\Phi_3(x)$ lässt sich durch $\Phi_1(x)$ und $\Phi_2(x)$ darstellen.

Offenbar ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person in der Zeit zwischen ξ und $\xi + d\xi$ aus G_1, und ferner in der Zeit zwischen $t - \xi$ und $t - \xi + dt$ aus G_2 ausscheidet, gegeben durch

$$\Phi_1(\xi)\, \Phi_2(t-\xi)\, d\xi\, dt.$$

Somit erhält man als Wahrscheinlichkeit, dass eine Person in der Zeit zwischen t und $t + dt$ sowohl aus G_1 als auch aus G_2 ausscheidet, durch

$$\int_0^t \Phi_1(\xi)\, \Phi_2(t-\xi)\, d\xi\, dt. \tag{11}$$

Die gleiche Wahrscheinlichkeit ist aber auch durch

$$\Phi_3(t)\, dt \tag{12}$$

gegeben. Daher ergibt sich nach Gleichsetzung von (11) und (12) die *Funktionalgleichung für Ausscheidefunktionen* (vgl. *H. Hadwiger* [14])

$$\Phi_3(t) = \int_0^t \Phi_1(\xi)\, \Phi_2(t-\xi)\, d\xi. \tag{13}$$

Sind Φ_1, Φ_2 und Φ_3 Funktionen der *gleichen Parameterklasse*, so kann (13), um die Abhängigkeit von diesem Parameter sichtbar zu machen, geschrieben werden

$$\Phi[C, t] = \int_0^t \Phi[A, \xi]\, \Phi[B, t-\xi]\, d\xi.$$

§ 4.

Lösung der Erneuerungsgleichung für eine spezielle Klasse von Ausscheidefunktionen.

Die im vorigen Paragraphen entwickelte Funktionalgleichung (13) führt uns dazu, *Ausscheidefunktionen* $\Phi_1(x)$ und $\Phi_2(x)$ *der selben Parameterklasse* aufzusuchen, die durch Faltung wieder in eine Ausscheidefunktion $\Phi_3(x)$ der gleichen Parameterklasse übergehen. Für solche Ausscheidefunktionen wird es stets möglich sein, die Erneuerungsgleichung (3) zu lösen. Die Erneuerungsfunktion ist ja gegeben durch die in jedem endlichen Intervall gleichmässig konvergente *Neumannsche Reihe* (10), wo die einzelnen Glieder für diese speziellen Ausscheidefunktionen leicht angegeben werden können.

Offenbar ist, unter Berücksichtigung der Voraussetzungen (A),

$$\Phi(x) = x^a e^{-\lambda x} \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu x^{\nu-1} \tag{14}$$

für $-1 < a \leqq 0$ und festem $\lambda > 0$, eine Ausscheidefunktion von der oben beschriebenen Art; kann doch die Funktionalgleichung (13), da die vorkommenden Laplace-Integrale *absolut* konvergieren, mit Rücksicht auf den *Faltungssatz* geschrieben werden,

$$L[\Phi_3, z] = L[\Phi_1, z]\, L[\Phi_2, z]. \tag{15}$$

Betrachten wir zwei zu derselben Parameterklasse gehörende Ausscheidefunktionen der Form (14),

$$\Phi_1(x) = x^a e^{-\lambda x} \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu x^{\nu-1} \tag{16}$$

und

$$\Phi_2(x) = x^b e^{-\lambda x} \sum_{\mu=1}^{m} B_\mu x^{\mu-1}, \tag{17}$$

so ergibt sich nach *Doetsch* [10], S. 401,

$$L[\Phi_1, z] = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_\nu \Gamma(\nu+a)}{(\lambda+z)^{\nu+a}}$$

und

$$L[\Phi_2, z] = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{B_\mu \Gamma(\mu+b)}{(\lambda+z)^{\mu+b}}.$$

Somit erhält man

$$L[\Phi_1, z]\, L[\Phi_2, z] = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} \frac{A_\nu B_\mu \Gamma(\nu+a)\Gamma(\mu+b)}{(\lambda+z)^{\nu+\mu+a+b}}.$$

Durch einfache Umformung und unter Berücksichtigung von (15) resultiert

$$L[\Phi_3, z] = \sum_{\varrho=2}^{l} \frac{C_\varrho \, \Gamma(\varrho + c)}{(\lambda + z)^{\varrho + c}} ; \tag{18}$$

wo

$$\begin{cases} C_\varrho = \sum \dfrac{A_\nu B_\mu \, \Gamma(\nu + a)\, \Gamma(\mu + b)}{\Gamma(\varrho + c)} \\ \text{(Summation über alle Lösungen der Gleichung} \\ \nu + \mu = \varrho, \quad 1 \leqq \nu \leqq n, \quad 1 \leqq \mu \leqq m) \\ c = a + b \\ l = n + m. \end{cases} \tag{18a}$$

Also ergibt sich schliesslich aus (18)

$$\Phi_3(x) = x^c e^{-\lambda x} \sum_{\varrho=2}^{l} C_\varrho \, x^{\varrho-1}, \tag{19}$$

womit dargetan ist, dass die zur selben Parameterklasse gehörenden Funktionen (16) und (17) durch Faltung wieder in eine Funktion der gleichen Parameterklasse übergehen.

Die zu der Ausscheidefunktion (14) gehörige Erneuerungsfunktion

$$\varphi(x) = \Phi(x) + \Phi(x) * \Phi(x) + \Phi(x) * \Phi(x) * \Phi(x) + \ldots$$

ist daher unter Berücksichtigung von (18 a) und (19) gegeben durch

$$\begin{aligned} \varphi(x) \;=\; & x^a e^{-\lambda x} \sum_{K=1}^{n} A_K^{(1)} x^{K-1} \\ & + x^{2a} e^{-\lambda x} \sum_{K=2}^{2n} A_K^{(2)} x^{K-1} \\ & + x^{3a} e^{-\lambda x} \sum_{K=3}^{3n} A_K^{(3)} x^{K-1} \\ & + \ldots\ldots, \end{aligned} \tag{20}$$

oder also durch

$$\varphi(x) = e^{-\lambda x} \sum_{m=1}^{\infty} x^{ma} \left(\sum_{K=m}^{mn} A_K^{(m)} x^{K-1} \right). \tag{21}$$

wo

$$(21a)\quad \begin{cases} A_K^{(m)} = \sum \dfrac{A_{\nu_1} \dots A_{\nu_m}\, \Gamma(\nu_1 + a) \dots \Gamma(\nu_m + a)}{\Gamma(K + ma)} \\ \text{(Summation über alle Lösungen der Gleichung} \\ \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_m = K\,, \quad 1 \leqq \nu_i \leqq n\,, \quad i = 1, 2, \dots m). \end{cases}$$

Für den aus (14) hervorgehenden *Spezialfall*

$$(22)\qquad \Phi(x) = \frac{\lambda^{n+a}}{\Gamma(n+a)}\, e^{-\lambda x}\, x^{n+a-1}$$

$$(\lambda > 0\,, \quad -1 < a \leqq 0\,, \quad n \geqq 1 \text{ ganz})$$

erhält man aus (21) die zugehörige Erneuerungsfunktion durch

$$(23)\qquad \varphi(x) = e^{-\lambda x} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m(n+a)}}{\Gamma[m(n+a)]}\, x^{m(n+a)-1}.$$

§ 5.

Ermittlung der Erneuerungsfunktion durch die symbolische Auflösungsformel.

Für $a = 0$ geht (22) über in

$$(24)\qquad \Phi(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\, e^{-\lambda x}\, x^{n-1}\,. \quad (n \geqq 1, \text{ ganz}).$$

Es soll für diese *spezielle Ausscheidefunktion* die Erneuerungsfunktion, welche nach *E. Zwinggi* [15], *A. W. Brown* [16] oder *L. Feraud* [17] ermittelt werden kann, durch die *symbolische Auflösungsformel* (9) gewonnen werden.

Wird (24) in (9) eingesetzt, so ergibt sich

$$\varphi(x) = L^{-1}\left\{\frac{\lambda^n}{(\lambda+z)^n - \lambda^n}\right\}. \tag{25}$$

Durch *Partialbruchzerlegung* erreichen wir die Darstellung

$$\varphi(x) = L^{-1}\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{P_\nu}{z - w_\nu}\right\}.$$

Somit erhält man

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} P_\nu e^{w_\nu x}. \tag{26}$$

Sind ϱ_ν die n Wurzeln der Kreisteilungsgleichung

$$\varrho^n - 1 = 0, \tag{27}$$

so ergeben sich die $2n$ Konstanten P_ν und w_ν aus

$$w_\nu = \lambda(\varrho_\nu - 1) \tag{26a}$$

$$P_\nu = \frac{\lambda^n}{n(\lambda + w_\nu)^{n-1}}.$$

Die Funktion (26) ist mit der aus (23) für $a = 0$ hervorgehenden identisch, denn (26) kann geschrieben werden:

$$\varphi(x) = e^{-\lambda x}\frac{\lambda}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} \varrho_\nu e^{\varrho_\nu \lambda x}. \tag{28}$$

Da ϱ_ν die n Wurzeln der Kreisteilungsgleichung (27) sind, kann gezeigt werden, dass gilt:

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} \varrho_\nu e^{\varrho_\nu z} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{mn-1}}{(mn-1)!},$$

also

$$\varphi(x) = e^{-\lambda x} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{mn} x^{mn-1}}{(mn-1)!} \tag{29}$$

§ 6.

Anwendung für eine Personengesamtheit, deren Absterbeordnung der schweizerischen Volkssterbetafel S. M. 1929/32 folgt.

Mit Hilfe der *Sterblichkeitsintensität* $\mu(x)$ und der *Verweilswahrscheinlichkeit* $p(x)$, deren Werte tabelliert sind [18], kann die Ausscheidefunktion

$$\Phi(x) = p(x)\,\mu(x) \tag{30}$$

berechnet werden.

Wir versuchen im folgenden, den statistisch gegebenen Verlauf von $\Phi(x)$ durch eine Funktion der analytischen Form (14) darzustellen.

Die durch (14) darzustellende Ausscheidefunktion zeigt in den ersten Jahren einen überaus steilen Abfall, erreicht bei $x = 12$ ein Minimum und nimmt später bei $x = 24$ noch einmal vorübergehend ab. Bei $x = 75$ erreicht sie ein Maximum, um sich nachher durch einen steilen Abfall der x-Achse zu nähern. Das nach dem Alter $x = 24$ erwähnte vorübergehende Abnehmen der Ausscheidefunktion scheint durch die neuzeitliche hygienische und sportlerische Lebensweise hervorgerufen zu sein und darf jedenfalls nicht schlechthin übergangen werden.

Es stellte sich bei den ersten Versuchen heraus, dass eine Funktion der Form (14), wo das Polynom $\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu x^{\nu-1}$ niedrigen Grades ist, zur Darstellung der Ausscheidefunktion für die schweizerischen Verhältnisse nicht ausreicht. Aus diesem Grunde wurde versucht, die Ausscheidefunktion durch ein Polynom hohen Grades darzustellen, wo die Mehrzahl der $A_\nu = 0$ sind. Durch rechnerische Versuche und mit Hilfe der entsprechenden graphischen Aufzeichnungen konnte der ungefähre Verlauf der Ausscheidefunktion ermittelt werden. Die

erhaltenen Werte für die Konstanten wurden sodann sukzessive verbessert, um eine möglichst gute Anpassung an den tatsächlichen Verlauf nach der schweizerischen Volkssterbetafel zu erhalten. Wir erhielten dabei

31) $$\Phi(x) = x^a\, e^{-\lambda x}\,(A_1 + A_{13}\, x^{12} + A_{25}\, x^{24} + A_{37}\, x^{36});$$

wo

$$\begin{aligned} a &= -\tfrac{1}{2} \\ \lambda &= \quad 0{,}5 \\ \log A_1 &= -\ 2{,}730\,7760 \\ \log A_{13} &= -\ 14{,}878\,7861 \\ \log A_{25} &= -\ 32{,}612\,8694 \\ \log A_{37} &= -\ 52{,}109\,5624 \end{aligned}$$

Der *statistische (treppenförmige)* und der *theoretische (glatte)*, durch die analytische Funktion dargestellte Verlauf, ist in Abbildung (I) gegeben.

Es kann die Anpassung der analytischen Funktion an die statistisch gegebene als befriedigend betrachtet werden, schmiegt sie sich doch in allen Altern ziemlich gut an die empirische Treppenfunktion an, was auch durch Vergleich der Spalte (2) und (3) der nachfolgenden Tabelle ersichtlich ist. Durch diese einfach gebaute, verhältnismässig wenig Konstanten enthaltende Funktion, ist es somit gelungen, $\Phi(x)$ analytisch darzustellen. Die zugehörige Erneuerungsfunktion kann also durch (20) ohne Schwierigkeit bestimmt werden.

Aus

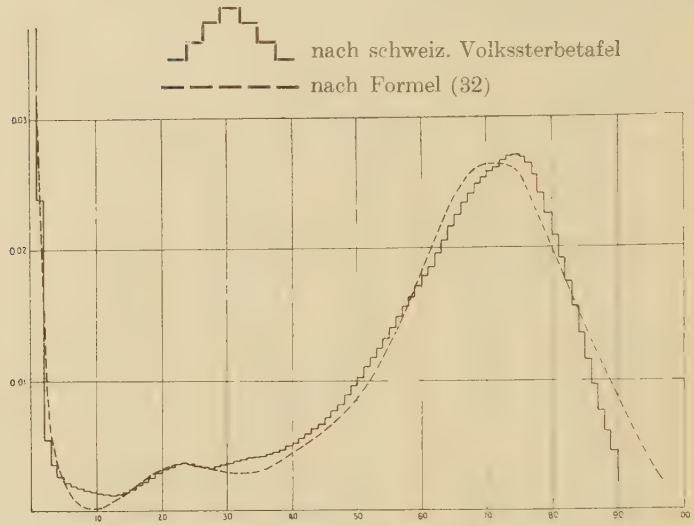
$$p(t) = 1 - \int_0^t \Phi(x)\, dx$$

lassen sich auch die entsprechenden Verweilswahrscheinlichkeiten berechnen. Der Verlauf dieser Verweilswahrscheinlichkeiten sowie der entsprechende aus der Tafel S. M. 1929/32 findet man wiedergegeben in Abbildung (II). Die zugehörigen Werte sowie ihre Differenzen sind ebenfalls in der nachfolgenden Tabelle dargetan [vgl. Spalten (5), (6) und (7)]. Diese wurde bei $x > 90$ abgebrochen, da die analytische Ausscheidefunktion langsamer gegen Null strebt als die zugrunde gelegte empirische Treppenfunktion.

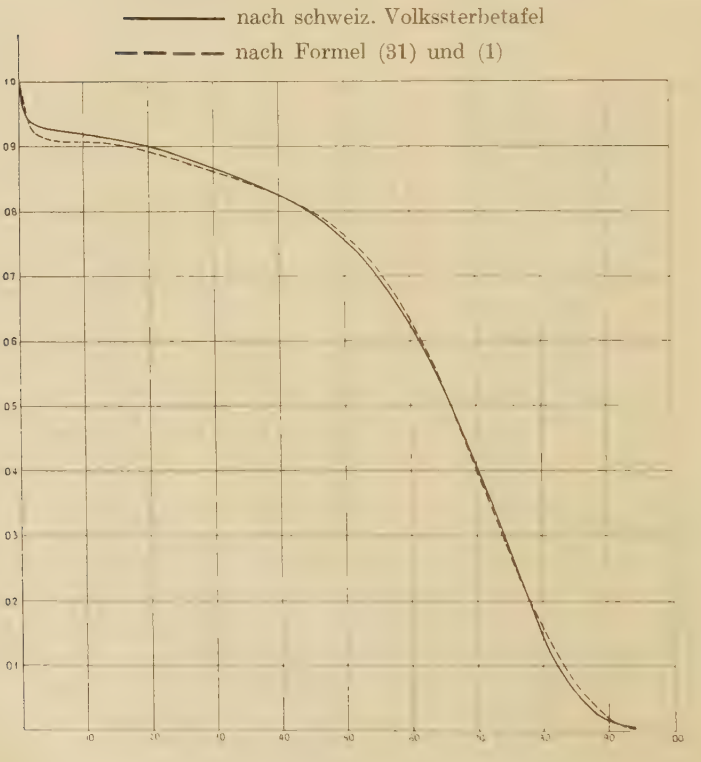
x	$\Phi(x)$ nach schweiz. Volks-sterbetafel	$\Phi(x)$ nach Formel (31)	Differenz (3)—(2)	$p(x)$ nach schweiz. Volks-sterbetafel	$p(x)$ nach Formel (31) und (1)	Differenz (6)—(5)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0		0,04801		1,0000	1,0000	0,0000
1	0,02378	2331	—0,00047	0,9438	0,9520	+ 82
2	536	1046	+ 510	9369	9287	— 82
3	353	529	+ 176	9326	9182	— 144
4	266	281	+ 15	9295	9129	— 166
5	215	154	— 61	9271	9101	— 170
6	192	87	— 105	9251	9086	— 165
7	175	51	— 124	9233	9077	— 156
8	161	33	— 128	9216	9072	— 144
9	149	28	— 121	9200	9069	— 131
10	139	32	— 107	9186	9066	— 120
1	131	44	— 87	9172	9063	— 109
2	125	64	— 61	9160	9058	— 102
3	129	91	— 38	9147	9052	— 95
4	142	124	— 18	9134	9043	— 91
5	164	160	— 4	9118	9030	— 88
6	190	199	+ 9	9101	9014	— 87
7	221	236	+ 15	9080	8995	— 85
8	254	271	+ 17	9056	8971	— 85
19	288	301	+ 13	9029	8944	— 85
20	318	325	+ 7	8999	8914	— 85
1	338	343	+ 5	8966	8881	— 85
2	354	352	— 2	8931	8847	— 84
3	362	354	— 8	8896	8812	— 84
4	359	350	— 9	8860	8776	— 84
5	349	342	— 7	8824	8741	— 83
6	339	331	— 8	8790	8707	— 83
7	333	318	— 15	8756	8674	— 82
8	336	306	— 30	8723	8642	— 81
29	344	294	— 50	8689	8612	— 77
30	356	286	— 70	8654	8582	— 72
1	370	283	— 87	8617	8554	— 63
2	383	284	— 99	8580	8525	— 55
3	395	291	— 104	8541	8497	— 44
4	403	303	— 100	8501	8468	— 33
5	411	319	— 92	8460	8438	— 22
6	422	340	— 82	8419	8406	— 13
7	436	364	— 72	8376	8372	— 4
8	453	392	— 61	8331	8335	+ 4
39	473	422	— 51	8285	8293	+ 8
40	495	454	— 41	8237	8251	+ 14
1	521	487	— 34	8186	8205	+ 19
2	551	521	— 30	8132	8157	+ 25
3	586	556	— 30	8075	8105	+ 30
4	625	593	— 32	8015	8049	+ 34
5	667	632	— 35	7950	7990	+ 40
6	713	673	— 40	7881	7926	+ 45

x	$\Phi(x)$ nach schweiz. Volks-sterbetafel	$\Phi(x)$ nach Formel (31)	Differenz (3)—(2)	$p(x)$ nach schweiz. Volks-sterbetafel	$p(x)$ nach Formel (31) und (1)	Differenz (6)—(5)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
7	766	718	— 48	7807	7859	+ 52
8	824	767	— 57	7728	7787	+ 59
49	888	823	— 65	7642	7711	+ 69
50	956	885	— 71	7550	7628	+ 78
1	1027	954	— 73	7451	7540	+ 89
2	1100	1032	— 68	7345	7445	+ 100
3	1174	1118	— 56	7231	7341	+ 110
4	1248	1212	— 36	7110	7229	+ 119
5	1323	1314	— 9	6981	7108	+ 127
6	1399	1423	+ 24	6845	6977	+ 132
7	1478	1537	+ 59	6701	6834	+ 133
8	1557	1656	+ 99	6550	6681	+ 131
59	1631	1777	+ 146	6390	6515	+ 125
60	1703	1898	+ 195	6223	6337	+ 114
1	1780	2017	+ 237	6049	6148	+ 99
2	1865	2131	+ 266	5867	5946	+ 79
3	1960	2238	+ 278	5676	5733	+ 57
4	2060	2336	+ 276	5475	5509	+ 34
5	2160	2422	+ 262	5264	5275	+ 11
6	2254	2495	+ 241	5043	5034	— 9
7	2344	2554	+ 210	4813	4778	— 35
8	2427	2596	+ 169	4575	4519	— 56
69	2491	2622	+ 131	4329	4254	— 75
70	2537	2631	+ 94	4077	4000	— 77
1	2581	2623	+ 42	3821	3734	— 87
2	2624	2598	— 26	3561	3471	— 90
3	2669	2557	— 112	3296	3212	— 84
4	2705	2502	— 203	3028	2956	— 72
5	2718	2432	— 286	2756	2706	— 50
6	2700	2350	— 350	2485	2462	— 23
7	2647	2258	— 389	2217	2227	+ 10
8	2555	2157	— 398	1957	2001	+ 44
79	2423	2049	— 374	1708	1785	+ 77
80	2267	1936	— 331	1473	1581	+ 108
1	2096	1819	— 277	1255	1387	+ 132
2	1917	1701	— 216	1054	1205	+ 151
3	1734	1582	— 152	871	1035	+ 164
4	1548	1463	— 85	707	877	+ 170
5	1353	1347	— 6	562	730	+ 168
6	1153	1234	+ 81	437	596	+ 159
7	955	1125	+ 170	331	472	+ 141
8	765	1021	+ 256	246	360	+ 114
89	593	923	+ 330	178	258	+ 80
90	447	830	+ 383	126	165	+ 39
			$\Sigma = -0{,}0099$			$\Sigma = -0{,}0321$

Ausscheidefunktion S. M. 1929/32 *Abbildung I*



Verweilswahrscheinlichkeit S. M. 1929/32 *Abbildung II*



Literaturnachweis.

[1] *Ch. Moser:* Beiträge zur Darstellung von Vorgängen bei einer sich erneuernden Gesamtheit. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker (M. V. M.), Heft 21, 1926.

[2] *E. Goursat:* Cours d'analyse mathématique. Verlag Gauthier-Villars, Paris 1927, Tome III, S. 336.

[3] *L. Herbelot:* Application d'un théorème d'analyse. Bulletin trimestriel de l'inst. des act. franç., Tome 19, 1909.

[4] *E. Zwinggi:* Zum Problem der Erneuerung. Blätter für Versicherungsmathematik, Band 2, Heft 1, 1931.

[5] *H. Schulthess:* Über das Erneuerungsproblem bei Verwendung eines analytischen Sterbegesetzes. M. V. M. Heft 33, 1937.

[6] *H. Hadwiger:* Zur Berechnung der Erneuerungsfunktion nach einer Formel von V. A. Kostitzin, M. V. M. Heft 34, 1937.

[7] *H. Hadwiger:* Zur Frage des Beharrungszustandes bei kontinuierlich sich erneuernden Gesamtheiten. Archiv für mathematische Wirtschafts- und Sozialforschung, Band 5, Heft 1, 1939.

[8] *H. Richter:* Die Konvergenz der Erneuerungsfunktion. Blätter für Versicherungsmathematik, Band 5, Heft 1, 1940.

[9] *H. Richter:* Eine Bemerkung zum Erneuerungsproblem. Archiv für mathematische Wirtschafts- und Sozialforschung, Band 5, Heft 3, 1940.

[10] *G. Doetsch:* Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Verlag Julius Springer, Berlin 1937.

[11] *V. A. Kostitzin:* Applications des équations intégrales (applications statistiques). Mémorial des sciences mathématiques, fasc. LXIX, 1935.

[12] *T. J. I'A. Bromwich:* An introduction to the theory of infinite series. Second edition, London 1926, S. 500.

[13] *G. Hamel:* Integralgleichungen. Verlag Julius Springer, Berlin 1937.

[14] *H. Hadwiger:* Natürliche Ausscheidefunktionen für Gesamtheiten und die Lösung der Erneuerungsgleichung. M. V. M. Heft 40, 1940.

[15] *E. Zwinggi:* Bemerkungen zum Erneuerungsproblem. M. V. M. Heft 36, 1938.

[16] *A. W. Brown:* A note on the use of a Pearson type III function in renewal theory. Ann. math. Statist. 11, 1940, S. 448.

[17] *L. Feraud:* Le renouvellement, quelques problèmes connexes et les équations intégrales du cycle fermé. M. V. M. Heft 41, 1941.

[18] *Eidgenössisches Statistisches Amt:* Beiträge zur schweizerischen Statistik. Heft 4, Bern 1935.

Lebenslauf.

Ich wurde am 22. Januar 1915 in Trubschachen geboren. Nach Absolvierung der obligatorischen Schulzeit (Primar- und Sekundarschule) in Oberried am Brienzersee, Signau i. E. und Neuenburg erfolgte im Frühling 1930 die Aufnahme ins Freie Gymnasium in Bern. Nach bestandener Realmaturität im Herbst 1934 immatrikulierte ich mich an der Universität Bern, wo ich versicherungswissenschaftlichen, mathematischen und nationalökonomischen Studien oblag.